多重可移置変換について (有限群の研究)

坂内, 英一

数理解析研究所講究録
200巻 1974年 52-55

多重可移置換群について

東大 理　坂内英一

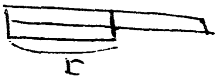
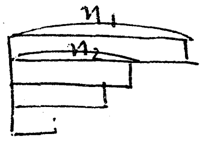
多重可移群に関して、いくつかの得られた結果について報告します

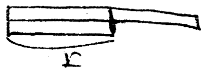
1° 多重可移群の正規部分群についての A.Wagner : Normal subgroups of triply transitive permutation groups of odd degree, Math. Zeit 94 (1966). 219-222. N. Ito : Normal subgroups of quadruply transitive permutation groups, Hokkaido J. 1 (1972) 1-6. の拡張

定理1 (character theory に関する部分の拡張)　$G = 2r$ 重可移 $(r \geqq 2)$ on $\Omega = \{1, \cdots, n\}$、$n > 2r+1$.、$H \lhd G$, $H \neq 1$, $H_{1,2,\cdots,2r-1}$ の $\Omega - \{1,2,\cdots,2r-1\}$ 上の orbits の個数 $= s$

$$\Longrightarrow 1) \quad \Big(\chi_{\underbrace{\square\square}_{r}\square\square\square}, \ \chi_{\underbrace{\square\square}_{r}\square\square\square} \Big)_H = s$$

2) $(\chi_D, \chi_D)_H = 1$

(ここでDは  とは異なる任意のdimension $\leq r$ のYoung diagramをあらわす. なおχ_DはYoung diagram Dにより決まるS_nの既約指標をあらわす. Young diagram D =  のdimensionを $n_2+n_3+\cdots$ で定義する)

3) χ  $\Big|_H = \chi_1+\cdots+\chi_s$

($\chi_1,\cdots,\chi_s$ は相異なるHの既約指標)

4) $\chi_1,\cdots,\chi_s$ は全て第一種, i.e., 表現は全て R-realizable.

(注：上の結果(特に4))はもう少し弱い仮定のもとで. e.g. $H = 2r-1$重可移群. $H_{1,\cdots,2r-1}$ の $\Omega-\{1,\cdots,2r-1\}$ 上の全てのorbitsが<u>self-paired</u>の場合にも成り立つ.)

<u>定理2.</u> $G = t$重可移 $(t \geq 4)$ on $\Omega=\{1,\cdots,n\}$, $n>t+1$. q=odd prime s.t. $q \mid t-1$. $1 \neq H \triangleleft G$. 更に

(1) $q \nmid n$.

(2) $|G:H| = H_{1,\cdots,t-1}$ の $\Omega-\{1,\cdots,t-1\}$ 上のorbitsの個数

$\Longrightarrow G=H$.

系1. G = t重可移 ($t \geq 4$) on $\Omega = \{1, \cdots, n\}$. $n > t+1$.
q = prime s.t. $q \mid t-1$. $1 \neq H \lhd G$ 更に.
(1) $q \nmid n$.
(2) G/H = solvable
$\Longrightarrow$ H = t重可移 on Ω

系2. $t = 6, 8$ の時は上の系1は G/H = solvable という仮定(2)なしに成り立つ.

系3 G = 素数次の non-solvable t重可移群 ($\forall t$)
$1 \neq H \lhd G$ $\Longrightarrow$ H も t重可移.

2° 多重可移群の分類問題に関しての. M. Hall: On a theorem of Jordan, Pac. J. Math 4 (1954), 219-226.
H. Nagao: On multiply transitive groups V, J. of Alg. 9 (1968), 240-248. の任意の odd prime の場合（但し多重度は上がるが）への拡張.

定理3. p = odd prime. $G = p^2$ 重可移 on $\Omega = \{1, \cdots, n\}$.
$G_{1, \cdots, p^2}$ の Sylow p-subgroup は $\Omega - \{1, \cdots, p^2\}$ 上 semi-regular ($\neq 1$)
$\Longrightarrow$ $n = p^2 + p$, $G \geq A^{\Omega}$

系 p=odd prime. G = t重可移 on $\Omega = \{1, \cdots, n\}$.
$G \not\geq A^{\Omega}$. かつ $G_{1, \cdots, t}$ の order は p で割れない

$\Longrightarrow\ t < p^2 + p$.

この系に対応することは最近宮本泉君により本質的に拡張された。

<u>定理（宮本）</u> $p=$ odd prime. $G = t$ 重可移 on Ω. $G \neq A^{\Omega}$ かつ $G_{1,\ldots,t}$ の order は p でわれない

$\Longrightarrow\ t < 3p$.

（注：この $3p$ は実は $2p+m$,（但 $m/p \to 0$ as $p \to \infty$）まで落とすことが出来る。）

なお、大山先生の（4重可移群の）$p=2$ に関連した分類を $p=$ odd prime（但、移る重度は増えるが）の場合に拡張することも色々と可能である。

<u>追記</u>、なお、この講演のあと、次の結果が証明できた。

<u>定理</u>. $p=$ an odd prime. $G = 2p$ 重可移 on $\Omega = \{1, 2, \ldots, n\}$. $p \nmid |G_{1,2,\ldots,2p}|$, $p^2 \,|\, |G_{1,2,\ldots,p}|$

$\Rightarrow$ 矛盾.

これは先の宮本君の結果を合わせることにより、<u>$2p$ 重可移群で $2p$ 点の stabilizer の order が p で割れないような群の分類が完成する</u>。